Ancienne édition Oraux XENS Algèbre 1

ORAUX XENS 1 p 284

144

181

Développement : le théorème de Gauss-Lucas + Application.

Théorème : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Application : 7 est le plus grand entier ≥ 2 tel que les racines non nulles de $(X+1)^7 - X^7 - 1$ soient de module 1.

Démo :

① On écrit $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{m_k}$ où $r \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ sont les racines deux à deux distinctes de P et $m_1, \dots, m_r$ leur ordre de multiplicité respectif.

* pour rec on utilise $(uv)' = u'v + uv'$

Puisque $P' \overset{*}{=} \lambda \sum_{k=1}^{r} m_k (X-\lambda_k)^{m_k - 1} \prod_{\ell \neq k} (X-\lambda_\ell)^{m_\ell}$. On obtient :

$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X-\lambda_k}$. Soit $z \in Sp(P')$.

- Si $z \in Sp(P)$ alors z est dans l'enveloppe convexe des racines de P (voir schéma)
- Sinon on peut écrire $0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{z-\lambda_k} = \sum_{k=1}^{r} m_k \frac{\overline{z-\lambda_k}}{|z-\lambda_k|^2}$ ce qui

$\overline{m_k} = m_k \in \mathbb{N}$

donne en passant au conjugué $\sum_{k=1}^{r} m_k \frac{z-\lambda_k}{|z-\lambda_k|^2} = 0$ puis : $z = \frac{\sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{|z-\lambda_k|^2} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{|z-\lambda_k|^2}}$

Comme chaque $\frac{m_k \geq 1}{|z-\lambda_k|^2 > 0 \text{ car } z \notin Sp(P)}$ est strictement positif, cette formule exprime

Demander clarification. par bibmath

le fait que z est un barycentre à coefficients strictements positifs des λ_k. La racine z de P' est donc dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Pourquoi ? intérieur strict ou pas ?

(Si z est une racine de P qui n'est pas une racine de P' alors z est à l'intérieur de cette enveloppe convexe.

② Soit $P(X) = (X+1)^m - X^m - 1$.

Si, $m=2$, $P(X) = 2X$, P a une seule racine : 0.

Pour $m \geq 3$, on a $P' = m(X+1)^{m-1} - mX^{m-1}$. Si $z \in Sp(P')$ alors $z \neq 0$ et donc $\left(\frac{z+1}{z}\right)^{m-1} = 1$. Il existe $k \in [\![0, m-2]\!]$ tel que $\frac{z+1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{m-1}}$

($k \neq 0$ car $z+1 \neq z$) donc $k \in [\![1, m-2]\!]$

On en déduit que les $n-2$ racines de P' sont les nombres complexes :

$$z_k = \frac{e^{-i\frac{k\pi}{n-1}}}{2i\sin\frac{k\pi}{n-1}} \quad k \in [\![1, n-2]\!].$$

Si toutes les racines de P sont de module 1, les racines de P' sont nécessairement dans le disque unité (par Gauss Lucas ☺) puisque ce sont des barycentres à coefficients positifs des racines de P.

sin est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Le module de z_1 est $\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n-1}} > 0$ et pour $n \geq 8$ on a $2\sin\frac{\pi}{n-1} < 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$ et $|z_1| > 1$.

Donc un entier $n \geq 8$ ne convient pas.

Regardons $P_0 = (X+1)^7 - X^7 - 1 = X(X+1)\overbrace{(7X^4 + 14X^3 + 21X^2 + 14X + 7)}^{Q}$

Le polynôme Q est un polynôme réciproque qui peut se mettre sous la forme $X^2 R(X + \frac{1}{X})$ où $R \in \mathbb{R}[X]$. En effet, on obtient, en posant $Y = X + \frac{1}{X}$:

$Q = X^2(7(X^2 + \frac{1}{X^2}) + 14(X + \frac{1}{X}) + 21) = X^2(7Y^2 - 14 - 14Y + 21)$

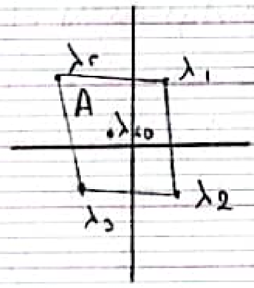
et $Q = 7X^2(Y-1)^2$.

Une racine z de P_0 distincte de 0 et -1 doit vérifier $z + \frac{1}{z} - 1 = 0$ ce qui équivaut à $z^2 - z + 1 = 0$ et donc $z = -j$ ou $z = -j^2$. On a donc

$Sp(P_0) = \{0, -1, -j, -j^2\} \subset \mathbb{D}$.

Cl : Le plus grand entier n pour lequel $(X+1)^n - X^n - 1$ a toutes ses racines non nulles de module 1 est $n_0 = 7$.

Annexe : (Bibmath)



Définition : Si E est un ev et A une partie de E, l'enveloppe convexe de A est l'intersection des parties convexes contenant A. C'est elle même un convexe, et c'est le plus petit convexe contenant A.

Pourquoi ? (voir mes documents

On démontre que l'enveloppe convexe de A est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A. Précisément si y est élément de l'enveloppe convexe de A, alors il existe un entier $p \geq 1$, $a_1, \dots, a_p \in A$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$ tq $\sum \lambda_i = 1$ tels que :

$$y = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$$

Connaître les polynômes réciproques (ou alors ne pas en parler et dans ce cas écrire directement $Q = \dots$)